المتتاليات (الأنماط الرياضية) Sequences (Mathematical Patterns)

سوف تتعلم
* النمط الرياضي
* المتتالية الحقيقية
* الحدّ النوني للمتتالية

عمل تعاوني

ما هو أقل عدد من المكالمات الهاتفية التي يمكنك الحصول عليها بحيث يتحدث كل طالب مع الآخر هاتفيّاً؟ (على اعتبار أن كل طالبين في المجموعة تجري بينهما مكالمة) ثم أجب عن الأسئلة الآتية باستخدام الشكل المجاور:

كم مكالمة يمكن أن تكون بين طالبين؟
كم مكالمة يمكن أن تكون بين 3 طلاب، 4 طلاب؟
استخدم الشكل المجاور لتحديد عدد المكالمات الممكنة بين 5 طلاب.
ثم أكمل الجدول الآتي:



عدد الأشخاص	1	2	3	4	5
عدد الاتصالات	0	1			

النمط الرياضي: أي من الصيغ الآتية تمثل النمط الموجود في الجدول السابق؟

$m = 2n - 3 \qquad m = n(n-1) - 5$

$m = \dfrac{n(n-1)}{2}$

حيث n عدد الطلاب، m عدد المكالمات.

أوجد عدد المكالمات m اللازمة لمجموعة الطلاب مستخدماً الصيغة الصحيحة:

(أ) الموجودة في الشكل.
(ب) الموجودة في صفك.










مثال (١)

كرة سقطت من ارتفاع 10 m عن سطح الأرض وترتفع إلى 85% من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض.
احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الرابع.

الحل

الارتفاع الأصلي 10 m.
بعد الاصطدام الأول بالأرض يكون ارتفاع الكرة $10 \times 0.85 = 8.5$ m.
بعد الاصطدام الثاني بالأرض يكون ارتفاع الكرة $8.5 \times 0.85 = 7.225$ m.
بعد الاصطدام الثالث بالأرض يكون ارتفاع الكرة
$7.225 \times 0.85 = 6.141$ m.
بعد الاصطدام الرابع بالأرض يكون ارتفاع الكرة
$6.141 \times 0.85 = 5.220$ m.
فيكون الارتفاع 5.22 m بعد الاصطدام الرابع للكرة بالأرض.
لاحظ تتابع الارتفاعات ... ,8.5, 7.225, 6.141, 5.220

تمهيد

اعتبر متتالية الأعداد:

حدّاً n...	10	8	6	4	2
a_n	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1

2 تسمى الحد الأول في المتتالية ويرمز له بالرمز a_1.
4 تسمى الحد الثاني في المتتالية ويرمز له بالرمز a_2.
6 تسمى الحد الثالث في المتتالية ويرمز له بالرمز a_3.
ويرمز للحد النوني في المتتالية بالرمز a_n حيث n هي من المجموعة $\mathbb{N}^*$ ويمثل الحد النوني في المتتالية.
اكتب صيغة النمط الذي يمثل المتتالية السابقة. هل يمكنك إيجاد الحدود الثلاثة الآتية؟
*اكتب الحد التاسع والحد الخامس عشر.

مسألة للتفكير

في المتتالية (a_n): $a_1 = 10 , a_n = 0.85a_{n-1}$

هل يمكنك كتابة الحدود الخمسة الأولى من المتتالية (a_n)؟

مثال من الهندسة

ادرس الجدول الآتي.
المتتالية التي تمثل أطوال أضلاع المربع
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ...)

الحدود	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
طول ضلع المربع	1	2	3	4	5	6	7	...
محيط	4	8	12	16	20	...	...	...

لاحظ واكتب a_{35}، a_{90}

*المتتالية التي تمثل محيط المربع

$(4, 8, 12, 16, 20 ...)$

فإن $a_7 = 4 \times 7 = 28$، $a_{35} = ... \times ...$

$a_{39} = ... \times ...$ ، $a_{90} = ... \times ...$

أوجد مساحة المربع المناظرة لطول ضلعه في الجدول السابق.

اكتب متتالية مساحة المربعات. استنتج a_{25}، a_{35} في المتتاليات السابقة.

مسألة للتفكير

في المثال السابق:

اكتب a_n لمتتالية أطوال أضلاع المربع بدلالة الحدّ السابق.

a_n لمتتالية محيطات المربع بدلالة الحدّ السابق.

a_n لمتتالية مساحات المربع بدلالة الحدّ السابق.

تعريف المتتالية الحقيقية

المتتالية الحقيقية دالة (تابع) منطلقها أو مجموعة تعريفها الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{N}^*$ ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

مسألة للتفكير

إذا علمت أن $a_1 = 7, a_n = a_{n-1} + 3$

أوجد a_4، a_5

تدريب

١ــ اكتشف النمط ثم اكتب الحدّ التالي:

(أ) $68, 71, 74, 77, 80, ...$

(ب) $1, 4, 7, 10, 13, ...$

(ج) $4, -8, 16, -32, 64, ...$

(د) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...$

(هـ) $1, 2, 6, 24, 120, ...$

(و) $0, 3, 7, 12, 18, ...$

٢– اكتب الحد النوني في المتتالية حسب النمط واستنتج a_{12}.

(أ) $3, 6, 9, 12, 15, \ldots$

(ب) $4, 8, 12, 16, 20, \ldots$

(ج) $4, 5, 6, 7, 8 \ldots$

(د) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

٣– اكتب الحدود الخمسة الأولى إذا عُلم:

(أ) $a_n = 5n$

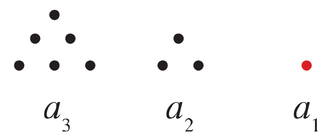
(ب) $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} + 3$

(ج) $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}$

(د) $a_n = (n - 5)(n = 5)$

(هـ) $a_n = \frac{1}{2}n(n - 1)$

٤– تدريب في الهندسة (الأعداد المثلثة)



$1, 3, 6$ تمثل الحدود الثلاثة الأولى من الأعداد المثلثة.

* أوجد الحد الخامس من متتالية الأعداد المثلثة

* هل الصيغة $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ $a_n =$ هي صيغة صحيحة للأعداد المثلثة؟

كيف تعرف ذلك؟

ملاحظات:

١– ليس من الضروري أن تكون جميع حدود المتتالية مختلفة، فمثلاً المتتالية $(2, 2, 2, \ldots)$ حيث $a_n = 2$ جميع حدودها متساوية وتساوي عدداً ثابتاً 2. وهذه تسمى متتالية ثابتة.

٢– يستخدم الرمز (a_n) للتعبير عن المتتالية ويختلف عن الرمز $\{a_n\}$ فهو للتعبير عن المجموعة حيث إن حدود المتتالية يمكن أن تتكرر، أمّا عناصر المجموعة فلا تتكرر.

٣– عند كتابة عناصر المجموعة لا يراعى ترتيب عناصرها، فمثلاً $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$، أمّا بالنسبة للمتتالية فإن ترتيب حدودها هام، فالمتتالية $(6, 3, 9, \ldots)$ تختلف عن المتتالية $(9, 6, 3, \ldots)$.

المتتالية الحسابية Arithmetic Sequence

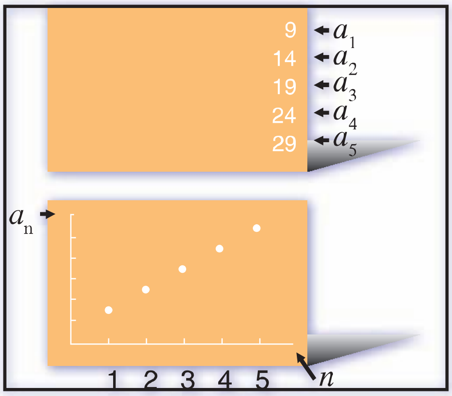
سوف تتعلم

* المتتالية الحسابية وأساسها
* الحد النوني للمتتالية الحسابية
* الأوساط الحسابية
* مجموع (n) حدّاً من حدود المتتالية الحسابية

عمل تعاوني

أوجد الحد السادس من المتتالية المبينة.
اكتب صيغة للحد السادس مستخدماً الحد الخامس.
مثل بيانياً حدود المتتالية.

تدريب



كون متتاليتين إحداهما بإضافة عدد ثابت والأخرى بطرح عدد ثابت من كل حد من حدود المتتالية الأصلية.
في المتتالية $(9, 14, 19, 24, 29, \ldots)$
أوجد الفرق بين حدين متتاليين تجده مقدراً ثابتاً في هذه الحالة سنسمي المتتالية بمتتالية حسابية.
أوجد الفرق بين حدين متتاليين في كل متتالية حصلت عليها. ماذا تلاحظ؟
في المتتالية الحسابية سنسمي الفرق بين حدين متتاليين بأساس المتتالية الحسابية ونرمز له بالرمز d.
ارسم في شكل بياني واحد العلاقة بين a_n و n، للمتتالية الأصلية والتي حصلت عليها في التدريب السابق. قارن بين الرسوم الثلاثة. ماذا تلاحظ؟

مثال (١)

في المتتالية $(6, 12, 18, 24, \ldots)$
نجد أن $12 - 6 = 18 - 12 = 24 - 18 = 6$
أي أن الفرق بين كل حد وسابقه يساوي 6 لاحظ أن $d = 6$ من الواضح أن هذه متتالية حسابية.

دعنا نفكر ونتناقش

المتتالية $(2, 5, 7, 12, \ldots)$
المتتالية $(48, 45, 42, 39, \ldots)$
هل هاتان المتتاليتان حسابيتان؟ إذا كانتا كذلك أوجد أساس كل منها.

تعريف

تسمى المتتالية (a_n) متتالية حسابية إذا كان المقدار $a_{n+1} - a_n$ ثابتاً لكل عنصر n من $\mathbb{N}^*$ ويسمى العدد الثابت أساس المتتالية ويرمز له بالرمز d.

وعلى ذلك $a_{n+1} - a_n = d$ أو $a_{n+1} = a_n + d$ أي أنه يمكن الحصول على أيّ حد من حدود المتتالية الحسابية (بعد الحد الأول) وذلك بإضافة d إلى الحد الذي يسبقه مباشرة.

مثال (٢)

إذا كان $a_1 = 5, d = 7$

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية.

الحل

$a_1 = 5$

$a_2 = a_1 + d = 5 + 7 = 12$

$a_3 = a_2 + d = 12 + 7 = 19$

الحدود الخمسة الآتية هي ... $5, 12, 19, 26, 33, 40,$

وتكون المتتالية $(a_n) = (5 ,12, 19, 26, 33, 40, ...)$

الحد النوني للمتتالية الحسابية General Term

إذا كان الحد الأول في المتتالية الحسابية (a_n) يساوي a أي $a_1 = a$ وأساس المتتالية يساوي d واعتبرنا الحد النوني هو a_n

فمن تعريف المتتالية الحسابية:

$a_1 = a$

$a_2 = a + d$

$a_3 = a + 2d$

$a_4 = a + 3d$

لاحظ النمط الرياضي واكتب a_9 ، a_{15}

وبصفة عامة: $a_n = a + (n - 1)d$

لكل n هي عنصر في $\mathbb{N}^*$

ولكن إذا كان الحد المعروف هو a_k فيكون $a_n = a_k + (n - k)d$

ملاحظة هامة: n تمثل رتبة الحد a_n أمّا a_n فتمثل قيمة الحد، فمثلاً $a_7 = 35$ تعني أن قيمة الحد السابع تساوي 35.

مثال (١)

أوجد الحد العاشر والحد المائة من المتتالية الحسابية $(5, 7, 9, ...)$

الحل

$a = 5 , d = 7 - 5 = 2$

$a_{10} = a + 9d$

$a_{10} = 5 + 9 \times 2 = 23$

$a_{100} = a + 99d = 5 + 99 \times 2 = 203$

$a_{100} = 203$

مثال (٢)

أوجد رتبة الحد الذي قيمته 99 من المتتالية الحسابية (... ,11 ,9 ,7).

الحل

$a = 7, d = 2, a_n = 99$

$a_n = a + (n - 1)d$

$99 = 7 + (n - 1) \times 2$

$92 = (n - 1) \times 2$

$n - 1 = 46$

$n = 47$

$n_{47} = 99$

مثال (٣)

في متتالية ما $a_n = 7n - 3$ لكل عنصر n في $\mathbb{N}^*$. أثبت أن المتتالية حسابية.

الحل

$a_n = 7n - 3$

$a_{n+1} = 7 \times (n + 1) - 3 = 7n + 4$

$a_{n+1} - a_n = (7n + 4) - (7n - 3)$

$= 7$ (مقدار ثابت)

المتتالية (a_n) حيث $a_n = 7n - 3$ متتالية حسابية.

مثال (٤)

إذا كان الحد الخامس من متتالية حسابية يساوي 9 والحد الثامن يساوي 15 أوجد المتتالية.

الحل

(1) $a_5 = 9, a + 4d = 9$

(2) $a_8 = 15, a + 7d = 15$

بالطرح $3d = 6,\ d = 2$

من (1) $a + 8 = 9,\ a = 1$

المتتالية $(1, 3, 5, 7, \ldots)$

الحل بطريقة أخرى

$a_8 = a_5 + (8 - 5)d$

ومنها $d = 2$

ثم $a_5 = a_1 + (5 - 1) \times 2$

ومنها $a_1 = 1$

المتتالية $(1, 3, 5, 7, \ldots)$

تمارين

١– أوجد a_{32} من المتتالية الحسابية $(34, 37, 40, 43, \ldots)$

٢– أوجد a_{45} من المتتالية الحسابية $(-9, -8.7, -8.4, -8.1, \ldots)$

٣– أوجد a_{29} من المتتالية الحسابية $(213, 201, 189, 177, \ldots)$

٤– أوجد الحدود الناقصة من المتتاليات الحسابية الآتية:

(أ) $(3, \square, \square, 9, \ldots)$

(ب) $(5, \square, \square, \square, \square, -35, \ldots)$

(ج) $(-10, \square, \square, \square, -11.6, \square)$

(د) $\left(\frac{13}{5}, \square, \square, \square, \frac{37}{5}, \ldots\right)$

٥– متتالية حسابية فيها $a_4 = 12$,$a_7 = 18$ أوجد المتتالية.

٦– متتالية حسابية فيها $a_5 = 14$,$a_8 = 20$ أوجد المتتالية.

٧– متتالية حسابية مجموع الحدين الثاني والثالث 43 وحدها الثامن = 5، أوجد المتتالية.

٨– متتالية حسابية مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها 36 ومجموع الحدين الخامس والسادس 66، أوجد المتتالية.

٩– يريد شخص يزن 130 kg إنقاص وزنه بمعدل كيلوغرامين كل شهر عن طريق نظام غذائي، بعد كم شهر سيكون وزنه 80 kg إذا استمر بنفس المعدَّل؟ هل من الممكن أن ينعدم وزنه إذا استمر بهذا المعدل؟

١٠– أوجد الحد الذي رتبته 300 في المتتالية الحسابية التي حدها السادس 8 وحدها التاسع 41.

١١– أوجد عدد الحدود من الحد ذي القيمة 10– وحتى الحد ذي القيمة 14 من المتتالية $(-10, -7, -4, ..., 14)$

الأوساط الحسابية Arithmetic Means

إذا كونت a, b, c متتالية حسابية حيث a, b, c هي عناصر من $\mathbb{R}$

فإن $b - a = c - b$.

$$2b = a + c$$

$$b = \frac{a+c}{2}$$

أي أن b هو الوسط الحسابي للعددين a، c.

مثال (١)

أوجد الحد الناقص من المتتالية الحسابية $(84, ..., 110)$.

الحل

الحد الناقص هو الوسط الحسابي بين 84 و110.

الحد الناقص: $97 = \frac{84 + 110}{2}$ فيكون الحد الناقص هو 97.

وبصورة عامة

إذا كانت $(a, b, c, d, ..., y, z)$ متتالية حسابية

فإن $(b, c, d, ..., y)$ تسمى أوساطاً حسابية للعددين (a, z).

مثال (٢)

أدخل 5 أوساط حسابية بين 23، 65

$(23, \square, \square, \square, \square, \square, 65, ...)$

الحل

$a_7 = 65$، عدد الحدود: $a_1 = 23,\ 2 + 5 = 7$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$6d + 23 = 65$$

$$6d = 42$$
$$d = 7$$
الأوساط هي 30، 37، 44، 51، 58

تدريب

١– أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين 3، 9–.

٢– أدخل خمسة أوساط حسابية بين 1، 13.

مجموع عدد معين n من حدود المتتالية الحسابية.

Sum of n Terms of an Arithmetic Sequence

عمل تعاوني

يقسم الصف لمجموعات صغيرة. المطلوب منك أن توجد المجموع (S) لحدود المتتالية الحسابية الآتية (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50)

$$S = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 + 50 \quad (1)$$

فكِّر أن تجمع الحدود هكذا:

$$S = 50 + 45 + 40 + 35 + 30 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5 \quad (2)$$

ماذا يحدث لو جمعنا (1) و(2)؟

$$2S = 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55$$
$$2S = 55 \times 10$$
$$2S = 550$$
$$S = 275$$

مجموع n من الحدود الأولى لمتتالية حسابية

مجموع n من حدود متتالية حسابية (a_n) يعطى بالقاعدة

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

حيث l هو الحد الأخير من المتتالية الحسابية وحدها الأول a وأساسها d وعدد حدودها n فيكون $a_n = l$

البرهان

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (l - 2d) + (l - d) + l$$
$$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a$$
$$2S_n = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \dots + (a + l)\,(a + l) + (a + l)$$
$$2S_n = n(a + l)$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

وحيث إن $a_n = l$

فإن $S_n = \frac{n}{2}(a + a_n) \quad (1)$

لكن $a_n = a + (n - 1)d$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)d]$$
$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \quad (2)$$

القانون (1) يعطي مجموع المتتالية الحسابية بمعلومية الحد الأول والحد الأخير.

القانون (2) يعطي مجموع المتتالية الحسابية بمعلومية الحد الأول والأساس (d).

مثال (١)

أوجد مجموع العشرين حدّاً الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول 10 وحدها العشرون 500.

الحل

$$n = 20,\ l = 500,\ a = 10$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$
$$S_n = \frac{20}{2}(10 + 500) = 5100$$

مثال (٢)

أوجد مجموع الستة عشر حدّاً الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول 15 وأساسها 7.

الحل

$$n = 16,\ d = 7,\ a = 15$$
$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)\ d]$$
$$S_n = \frac{16}{2}[2 \times 15 + 15 \times d]$$
$$S_n = 8(30 + 105)$$
$$= 8 \times 135$$
$$= 1080$$

مثال (٣)

كم حدّاً يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (10, 15, 20, ...) ليكون المجموع 450؟

الحل

$$S_n = 450,\ d = 5,\ a = 10$$
$$\frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = S_n$$
$$\frac{n}{2}[20 + (n - 1) \times 5] = 450$$
$$\frac{n}{2}(15 + 5n) = 450$$
$$15n + 5n^2 = 900$$
$$n^2 + 3n - 180 = 0$$
$$(n + 15)(n - 12) = 0$$

$n = 12$ أو $n = -15$

وحيث إن $n = -15$ مرفوض؛ أي أن $n = 12$ عدد حدود المتتالية هو 12.

مثال (٤)

إذا كان مجموع n حدّاً من حدود متتالية حسابية يتعين بالقاعدة $S_n = n(5 - n)$ فأوجد:

أوّلاً – المتتالية الحسابية.

ثانياً – الحد التاسع منها.

ثالثاً – عدد الحدود اللازم أخذها من المتتالية ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع -300.

الحل

أولاً: نضع $n = 1$ $\qquad S_1 = 1(5 - 1) = 4$

نضع $n = 2$ $\qquad S_2 = 2(5 - 2) = 6$

نضع $n = 3$ $\qquad S_3 = 3(5 - 3) = 6$

نضع $n = 4$ $\qquad S_4 = 4(5 - 4) = 4$

$a_1 = S_1 = 4$

$a_2 = S_2 - S_1 = 6 - 4 = 2$

$a_3 = S_3 - S_2 = 6 - 6 = 0$

$a_4 = S_4 - S_3 = 4 - 6 = -2$

المتتالية: $(4, 2, 0, -2, ...)$

ثانياً: $a_9 = S_9 - S_8$ $\qquad$ أكمل ...

أو

$a_9 = a + 8d$ $\qquad$ أكمل ...

ثالثاً: $S_n = n(5 - n)$

$-300 = n(5 - n)$

$n^2 - 5n - 300 = 0$

$(n - 20)(n + 15) = 0$

$n = 20$ أو $n = -15$

عدد الحدود المطلوبة يساوي 20.

أكمل بحل آخر.

تمارين

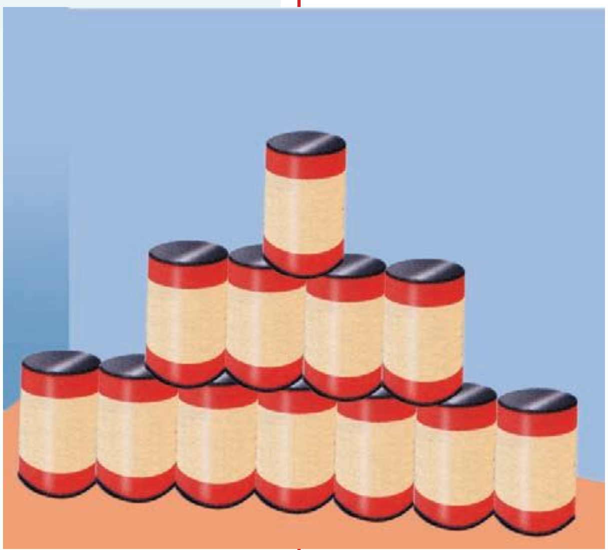
١– أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية (... ,9 ,7 ,5).

٢– أوجد مجموع العشرين حدّاً الأولى من المتتالية الحسابية (... ,12 ,16 ,20)

٣– كم حدّاً يلزم أخذها من المتتالية الحسابية (... 8 ,12 ,16) ليكون مجموعها -20؟

٤– أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية $(\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2}, ...)$.

٥– مسرح مدرسي يحوي 15 مقعداً في الصف الأول وكان كل صف آخر يتسع لعدد من المقاعد يزيد على الصف الذي يسبقه مباشرة بمقدار مقعدين. كم عدد المقاعد في هذا المسرح إذا كان يتسع لـ 20 صفّاً؟



٦– في محل بالسوبرماركت وضعت علب المربى كما في الشكل. في الصف الأول وضعت علبة واحدة. في الصف الثاني وضعت 4 علب. في الصف الثالث وضعت 7 علب. وسار بالنمط نفسه. احسب عدد العلب في الصف 25.

٧– إذا كان مجموع n الحدود الأولى من متتالية حسابية هو $\frac{n}{2}(49 - 3n)$ أوجد المتتالية، ثم احسب قيمة n التي تجعل هذا المجموع مساوياً 30.

٨– حنفية تصب في الدقيقة الأولى 21 لتراً، ثم يزيد ما تصبه بعد ذلك 3 لترات في الدقيقة. بعد كم دقيقة يكون مجموع ما تصبه 990 لتراً؟

